

結び目の数学 ～ほどける結び目とほどけない結び目～

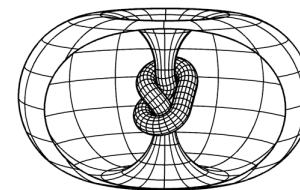


ネクタイ、リボン、ロープなど私たちの身の回りには様々な「結び目」があります。このような結び目を数学的に取り扱って研究する分野を、結び目理論といいます。

このポスターでは、3彩色と呼ばれる結び目に色を塗る方法を用いて、ほどける結び目とほどけない結び目の違いを解説します。

結び目の数学を通して、現在の数学の姿・世界の一端を紹介します。みなさんのご参加をお待ちしています。

日本数学会の概要



目的

数学の研究を盛んにし、またその普及をはかり、関係諸部面とも協力して学術文化の向上発展に寄与することを目的とする

事業

1. 学術的会合の開催
2. 学会誌及び図書の刊行
3. 数学に関する図書及び雑誌の収集整備
4. 数学研究の奨励及び数学に関する業績の顕彰
5. 数学研究者の育成
6. 数学研究の交流及び数学の研究成果の普及
7. 社会における数学基盤の整備
8. 数学の発展及び普及のための調査・研究
9. 国内外の関連学会、諸団体との連絡及び協力
10. その他目的を達成するために必要な事業

会員は数学の研究者ばかりではなく、教育者、学生などの数学に興味を持つ人たちからなります。

一般市民の方を対象に、年2回講演会を実施しています。本物の数学に触れられる機会がすぐそこにある！

結び目とは？

日常生活の中で「結び目」といえば、紐を結んだ状態のことを想像するかと思います。



しかし、**紐の両端を動かす**ことで、どのような結ばれた紐も全てほどくことができます。



これでは「結び目ができている状態」と「結び目のほどけた状態」をどこで区別すれば良いのか分からなくなります。

数学における結び目

そこで、数学では結び目を考える際に、**紐の両端を閉じる**ことにします。すなわち、数学では、空間内で結ばれた1つの輪を**結び目**といます。



結び目を数学的な対象として研究する分野を結び目理論とといいます。結び目理論においては、空間内で連続的に変形して移り合う結び目は同じものと見なして、結び目を研究します。

このポスターの目標

これから、いかにもほどけなさそうな下図左の結び目（三葉結び目と呼ぶ。）は、下図右のほどけている結び目（自明な結び目と呼ぶ。）とは実際に異なることを説明していきます。

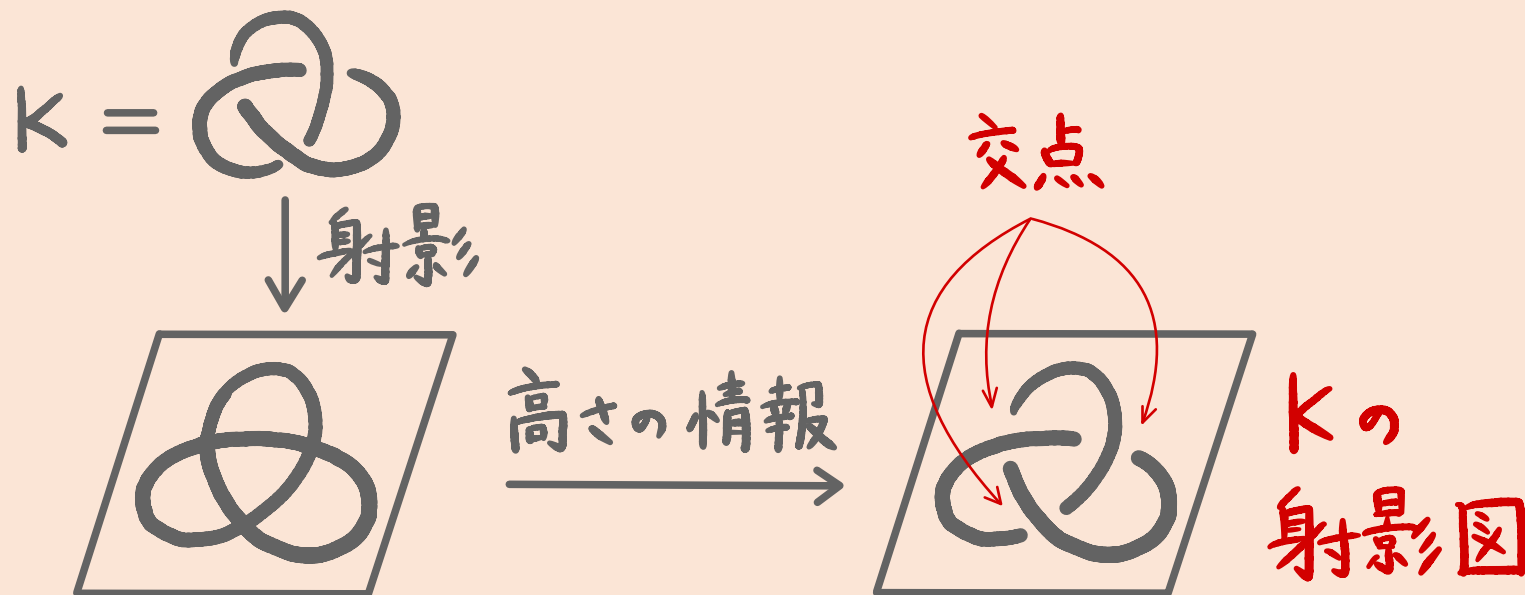


では、2つの結び目が異なることはどうやって示せば良いのでしょうか？どんなに頑張っても変形できないからというのは、数学的な理由とはいえません。ここでは、3彩色と呼ばれる結び目に色を塗る方法を用いて証明します。

結び目の射影図

結び目は空間内の対象であるため、そのままでは扱いにくい図形です。そこで、結び目を平面上の図形として表すことを考えます。

下図のように、結び目 K を平面に射影し高さの情報を与えたものを **K の射影図**といいます。（ K の射影図は無数個あることに注意。）

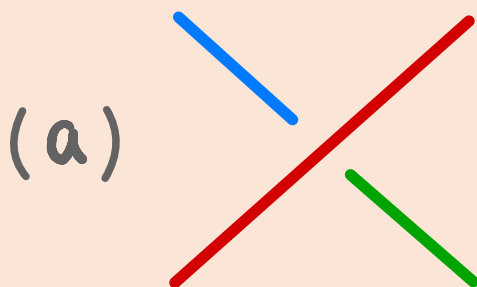


3彩色可能性

結び目の射影図 D は交点によっていくつかの曲線に分かれます。これらの曲線を D の弧といいます。

D の各弧が次の2条件を満たして3つの異なる色で塗り分けられるとき、 D は3彩色可能であるといいます。

1. 射影図 D 全体においては、**2色以上**が使われている。
2. D の各交点に集まる3つの弧には、**(a) 異なる3色が塗られている**か、または、**(b) 同じ1色のみが塗られている**か、のいずれかになっている。

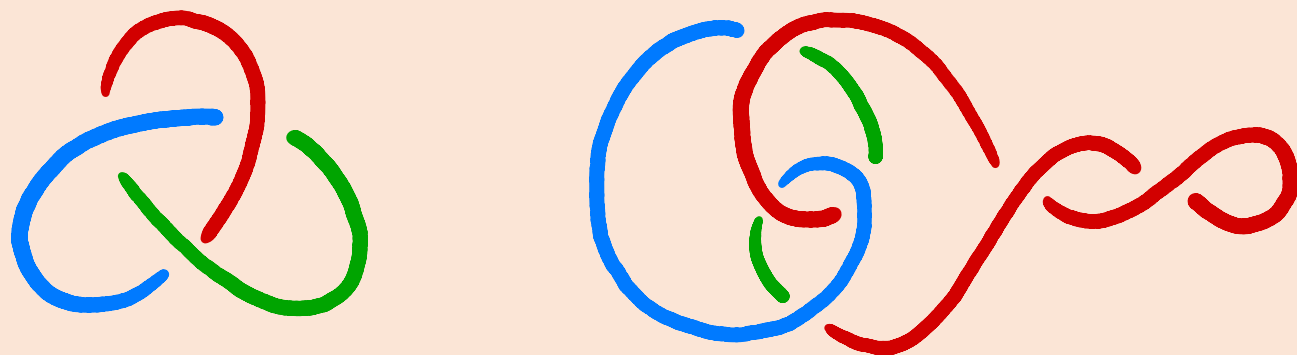


三葉結び目は3彩色可能である

「結び目 K の1つの射影図 D が3彩色可能であるならば、 K のどの射影図 D' も3彩色可能である」ことが知られています。

すなわち、3彩色可能性は（射影図の選び方に依らない）**結び目 K 自体の性質**です。そこで、結び目 K が3彩色可能な射影図を持つとき、 **K は3彩色可能である**ということにします。

下図では、三葉結び目の2つの射影図が（赤、青、緑の3色で）3彩色可能であることを示しています。



ここまでのまとめ

三葉結び目は3彩色可能であることが分かりました。

一方、自明な結び目は3彩色可能ではありません。（なぜなら、自明な結び目の交点のない射影図は、弧が1本しかなく、2色以上使って彩色することはできないからです。）

よって、「**三葉結び目と自明な結び目は異なる**」という定理を示すことができました。



上記定理の証明では、難しい数式を使うことなく、結び目に色を塗るというアイデアと論理的な議論だけを用いました。

難解な式を計算することばかりが数学ではありません。結び目の数学を通して、多様な数学の雰囲気を感じてもらえたら嬉しいです。

問題（おまけ）

下図左(a)の結び目は3彩色可能であり、下図右(b)の結び目は3彩色可能でないことを各自確かめてみましょう。

（したがって、(a)と(b)の2つの結び目は異なります。）

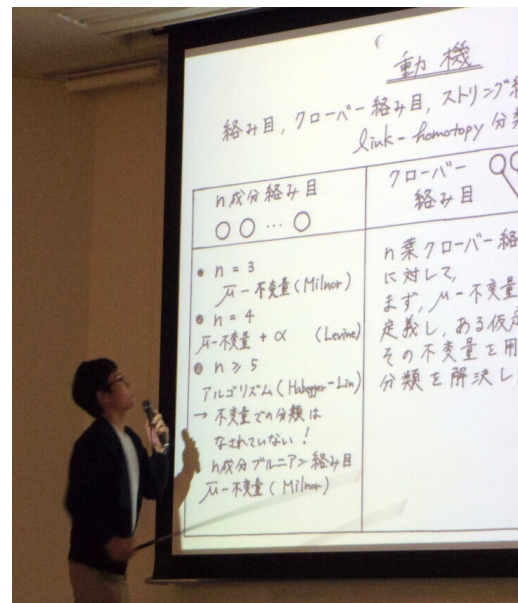


ロールモデルの紹介

氏名：和田 康載（神戸大学・助教）
研究内容：幾何学、とくに結び目理論

大学選び：中学生時代に友人同士での勉強の教え合いを通して、教えることに楽しさを覚え、教員を目指すようになりました。数学が好きだったので、数学の教員免許が取れる教員養成大学へ進みました。

数学の研究者を目指した理由：大学院で数学の研究というものを初めて行い、自分なりの数学の世界を創り出せることに今までにない面白さを感じました。これはとにかく面白い！数学の研究を一生の仕事にしたい！と思い、そのまま研究者の道へ。



女子中高生へのメッセージ

数学は科学技術を支えています。ビルや橋など建築物の安全性を支えているのが数学なら、位置情報を使って航空機や船舶の安全な航行を保証してくれるのも数学です。その他、宇宙開発海底探査、地中探査、さらには安全かつ効率の良い通信を実現するためにも、数学は欠かせません。

数学そのものが面白く、美しいです。数学をとことん勉強することで、数学自体が持つ面白さ、美しさを真に感じ取ることができます。数学における美を一緒に味わってみませんか？

数学の世界は多様です。数学を苦手を感じている方は、自分に合った数学に出会えていないだけかもしれません。数学に少しでも興味があれば、是非ポスターブースに遊びに来て下さい。多様な数学の世界の話やキャリア相談など何でも聞いて下さい。